

ベイズ推定による信号検出モデルの拡張

山根嵩史（川崎医療福祉大学）

私の方ではベイズ推定による信号検出モデルの拡張というタイトルでお話をさせていただきます。ベイズ推定は今、心理学の領域でもかなり流行っている推定法ですので、皆様の中にもご存知の方が結構いるんじゃないかという風に推察できますけれども、そのベイズ推定で信号検出モデルを扱おうと、点推定による信号検出モデルの限界というか、疑問点に回答することができるよ、というようなお話をさせていただこうと思います。よろしくお祈りします。

等分散信号検出モデルのおさらい

先ほど井上先生に詳しくお話いただいたので（井上, 2019）もう大丈夫かと思いますが、一応おさらいをさせていただきます。これが普通のいわゆる、等分散の信号検出モデル（Figure 1）ですね。横軸に何らかの心理量、記憶の実験で言えば記憶の強度などの心理量を取ります。左側がノイズ分布（N分布）になります。再認実験などで言いますとフィルター項目に対する心理量の分布です。そして、ターゲット項目に対する心理量が右側のシグナル+ノイズ分布（SN分布）に該当し、図はこの2つの分布が重なり合っている状態になります。参加者が再認課題で何をするかと言いますと、自分の中の判断基準に照らして、どちらの分布であっても、その判断基準を上回れば「あった／はい」というふうに回答します。ノイズの分布に対して「あった」と回答すると誤警報（False Alarm: FA）になりますし、信号の分布にちゃんと「あった」と回答すると、正答（Hit）ということになります。ノイズの分布とシグナル+ノイズ分布の平均値の差が信号検出力 d' になりますし、判断基準 k と2つの分布の境目の差が反応バイアス c となります。ノイズ分布のうち、判断基準を上回った部分の面積の割合である誤警報率と、シグナル+ノイズ分布のうち、判断基準を上回った部分の面積の割合であるヒット率に基づいて、2つの分布の特性や判断基準について推測するというのが、信号検出理論のやっていることです。

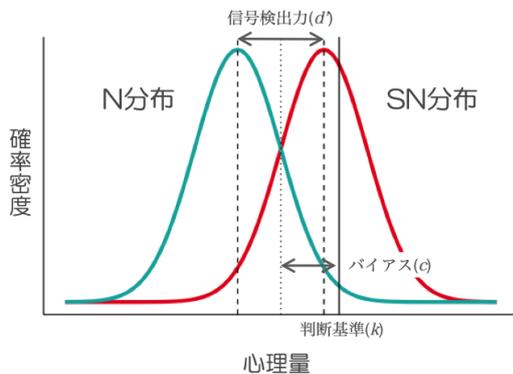


Figure 1. 等分散信号検出モデル

こういうふうな、これまでの等分散の信号検出モデルを見たときに、素朴に疑問に思うことがあるのではないかと思います。例えば、信号検出力 d' や判断基準はブレたりしないのか、ということです。先ほども言いましたように、信号検出モデルでは、ヒット率と誤警報率に基づいて、その人の判断基準が一意に決まります。あるいは、実験の条件ごとに、判断基準や信号検出力を比較しようとする、その実験のそれぞれの参加者のヒットの数やFAの数を全部足し合わせて、その条件の判断基準、その条件の信号検出力 d' を求めたりもします。そうすると、折角のそれぞれの参加者の判断基準であったり検出力であったりといった個人差の情報は失われてしまいますし、参加者の中だけで見ても、慣れないうちは判断基準を緩めにしていたけれども、だんだん厳しくなっていくとか、あるいはその逆といった、判断基準が参加者の中でブレるといったことがありえないのか、ということを考えたりします。

それから、先ほど井上先生の話の中でもありましたけれども、信号検出理論においてはシグナル+ノイズ分布とノイズ分布はそれぞれ正規分布である、等分散であるという前提を置いています。皆さんの研究対象の現象を考えていただくと、これって結構厳しい仮定なんじゃないかということも考えられます。2つの分布がそれぞれ正規分布で、かつ等分散というのはかなり厳しい仮定なんじゃないかと、これを外すことはできないのかというのが素朴な疑問の一つになります。そこで、ベイズ推定というアプローチを取れば、これら2つの疑問に対して、完璧には言いませんけれども、一定の回答を与えることができるということを、今日のお話とさせていただきます。例えば、ベイズ推定に基づいてアプローチすれば、判断基準や信号検出力といった指標の個人内・個人間の不確実性みたいなものも扱うことができますし、ベイズ推定というアプローチに基づけば、不等分散信号検出モデルといったモデルにも自然に拡張することができます。

ベイズ推定に基づく信号検出モデル

ベイジアン信号検出モデルの利点として、Lee (2008) では以下の3つの点が挙げられています。1つ目が、ベイジアン信号検出モデルというよりもベイズ推定の特徴なんですけれども、事後分布の形状が制限されていないので、極端にヒット率やFA率が高い参加者がいた時に、これまでの信号検出理論だとあまり正確な推定ができないという事態が起こるんですけれども、ベイズ推定であれば妥当な推定ができる点です。次に、どのようなサンプルサイズであっても信頼性を損なうことなく推定することができる点です。サンプルサイズが小さくても良いという

わけではないのですが、小さいサンプルサイズでも正確に推定することができるし、参加者の人数の増減に応じて感度が変わっていくということも言われています。そして、今日の話に最も関係するのが3つ目のポイントで、階層モデルとか不等分散の信号検出モデルといった、等分散の信号検出モデルから一步踏み込んだ拡張的なモデルでも、ベイズによる信号検出モデルであれば扱うことができます。

さっきからベイズ推定ベイズ推定と言っていますけれども、このベイズ推定って一体何なのかという話ですね。ただ、これに関しては、よくご存知の先生方も多分いらっしゃいますし、色々な書籍で解説されているところですので、ここではあえて語弊を恐れずに、簡単にエッセンスだけお伝えしようかと思っています。ベイズ推定という、知りたいパラメータの事後分布、つまり知りたいパラメータがどういふふう分布しているかということ、事前の情報——これを事前分布と言います——それからデータ——これを尤度と言います——に基づいて乱数発生をすることで求める推定法のことです。例えば、コイン投げの例がよく使われるんですけども、コインを投げて表が出る確率 θ を求めようとする、データとしては10回分のコイン投げの表裏のようなものが出てきます。こういうふうな表・裏といったデータというのは、コインの表が出る確率 θ に基づくベルヌーイ分布によって生成されることになります。この表が出る確率を、ベイズ推定で求めます。事前の情報、事前分布という形で与えるんですけども、何も情報がなければ一様分布と呼ばれる何も情報のない分布を設定しても構いません。そんな感じで、事前の情報と手元にあるデータ、そして求めたいパラメータに関するモデルに基づいて乱数発生をどんどん行くと、その乱数発生したサンプリングの結果が、求めたいパラメータの事後分布になります。こんな感じで、ベイズ推定というのは何らから知りたいパラメータがどういふ分布なのかという目的意識があって、事前情報とデータ、モデルに基づいて、乱数発生を行うことで事後分布を求めるやり方だと思っていただければ良いかなと思います。

ですので、ベイズ推定には知りたいパラメータの事後分布が確率的に表されるという特徴がまずあります。それから、最尤推定では解くことのできない複雑なモデルでも、ベイズ推定ではある意味、力技で解くことができる点も特徴になります。

ベイズ推定の特徴の中でも、パラメータを確率的に表現するという点が、今回のテーマである信号検出モデルと親和性が高いと言われていて、右上の図 (Figure 2) が、横軸に信号検出力 d' の値を、縦軸に判断基準 k の値を示した同時事後分布です。先ほど言ったように、ベイズ推定ではそれぞれ d' の値も基準の値も分布で求められますので、分布の密度が少ないところが青色で、色が薄くなっていくにつれて分布の密度が高くなっているという様子で図示されます。真ん中の赤い点は何かというと、これは従来の、点推定に基づく信号検出力モデルで点

推定した d' の値と基準の値の交点です。これを見ていただくと、ベイズ推定に基づいて求められたパラメータの分布のちょうどピークのところに、点推定した検出力と判断基準の値が来ていることがお分かりいただけるかと思います。ということで、ベイズ推定によって判断基準や検出力の指標の不確実性を考えることができます。点推定に基づく信号検出モデルだと、たった一点の値だけになってしまって不都合なんですけれども、ベイズ推定に基づけば、指標の不確実性も考えることができるということです。

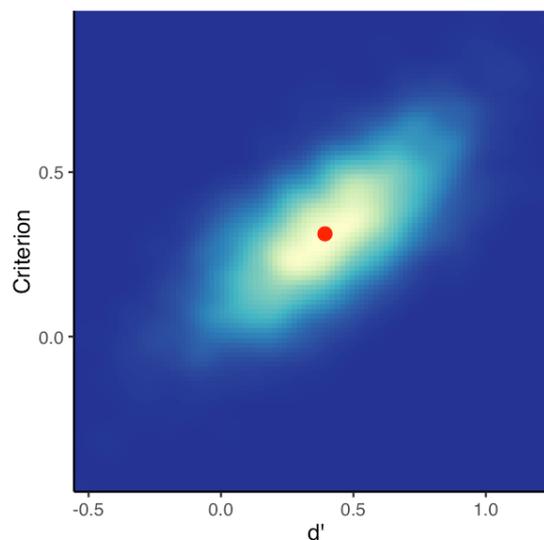


Figure 2. 信号検出力と判断基準の同時分布

それと関連するのが階層モデルです。階層モデルというのはグループだったり個人だったり、あるいは項目だったりといったものによる差をうまく扱うためのモデルになります。例えば学校のクラスだったりとか、実験におけるそれぞれの参加者の反応、それから一定の基準で選ばれてきた項目というのは、性質が似てくることが素朴に考えられます。そういったものを完全にランダムな値として推定してしまうと、せっかくの「性質が似ている」という情報が失われてしまうので勿体ないわけですね。せっかく反応が似ているのに、ランダムなものとして推定してしまうのは勿体ないので、グループによる差とか、個人差とか、項目差というのは、特定の分布から生成されるんだと仮定することで、より推定が楽になったりだとか、色々良いことがあります。これが階層モデルですね。グループ差といったもののパラメータが類似しているのも、その更に上に、背後に特定の分布を置くのが階層モデルと呼ばれるものです。

この階層モデルを信号検出モデルに適用することで、従来の点推定の信号検出モデルでは困難であった、「各個人の検出力や判断基準がばらつく」という仮定を自然にモデルに取り入れることができます。

ベイズ推定による信号検出モデルの実装

ではベイズ推定による信号検出モデルはどうやって実装するのか

という話になりますけども、もう既に書籍に解説がございまして、豊田先生の本(豊田, 2017)であつたりとか、井関先生が翻訳された Wagenmakers の本 (Lee & Wagenmakers, 2013 井関訳, 2017) の中に、実装のためのコードが載っております。

モデルの概念図はこんな感じになるんですけども (Figure 3), この灰色の部分を実際のデータですね。ヒットの数と FA の数です。それぞれの参加者のヒットと FA というのは、ヒット率と FA 率という潜在変数に基づいて生じると仮定されます。さらにヒット率と FA 率の背後には、反応バイアス c と検出力 d' が入るといモデルになっています。

これを階層化したものが階層信号検出モデルになりまして (Figure 4), 下の部分は先ほどのモデルと一緒にですけども、それぞれの参加者の反応バイアス c と信号検出力 d' が、それぞれ背後にこういうふうな平均値と標準偏差を持つ正規分布に基づいて生じると想定したのが、ベイジアン階層信号検出モデルになります。

せっかくでするので実装例も少しお見せしたいと思います。山根・中條 (2015) のデータを使っています。この実験は、有意義語が呈示される有意義条件と、無意味語が呈示される無意味条件の 2 つの条件がありました。再認課題を使っていますので、この 2 つの条件の分布の違いについて、データに階層信号検出モデルを当てはめて見てみたいと思います。

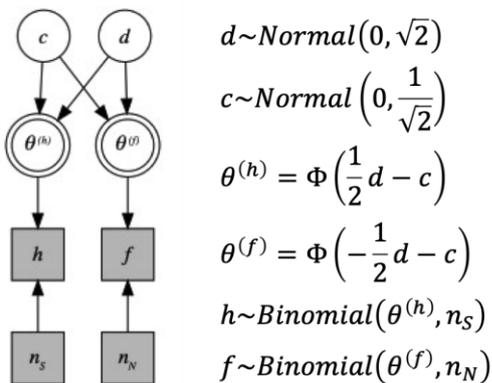


Figure 3. ベイズ推定による信号検出モデル (豊田, 2017 の p.134, 図 15.3 を参考に作成)

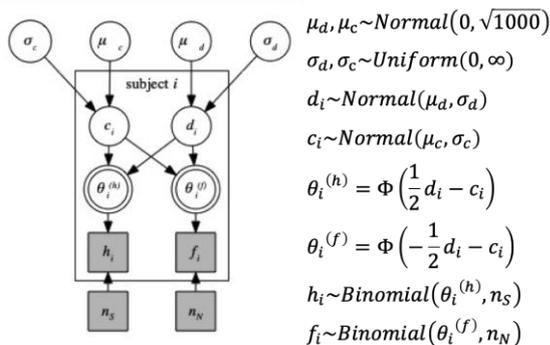


Figure 4. ベイズ推定による階層信号検出モデル (豊田, 2017 の p.135, 図 15.4 を参考に作成)

必要なのは、当然ですが、まずそれぞれのデータです。特にヒットの数と FA の数が入ったデータが必要なと、それから Stan コードが必要で、Stan というのはベイズ推定に必要な乱数を生成するためのソフトですね。そして、その Stan コードを走らせるための R のコードが必要です。

結果はこんな感じになりまして、これが条件ごとの検出力 d' の事後分布ですね (Figure 5)。上が有意義条件で、下が無意味条件になりますが、検出力 d' がやはり有意義語の方が高くなっています。確信区間が被っていませんので、有意義条件の方が検出力が高いという結果になっています。これは素朴に納得できるかな、と思います。それから参加者ごとのバイアスの事後分布が出てきます (Figure 6)。今回は分布が被っていますのであまり大したことは言えませんが、参加者ごとに不確実性を加味した検討をすることができるということです。

不等分散信号検出モデル

ちょっと時間が押していますが、簡単に不等分散の信号検出モデルについてもお話しておきたいと思います。最初に、信号検出モデルには正規性の仮定と等分散性の仮定があると言ったんですけども、ノイズの分布とシグナルの分布の分散が等しくないといった状況はしばしば起こり得ます。そういった時に使われるのが不等分散の信号検出モデルです。そういうふうな仮定はどうやって確認できるかと言いますと、先ほど井上先生のお話の中にもありました、ROC 曲線ですね。特に、ヒット

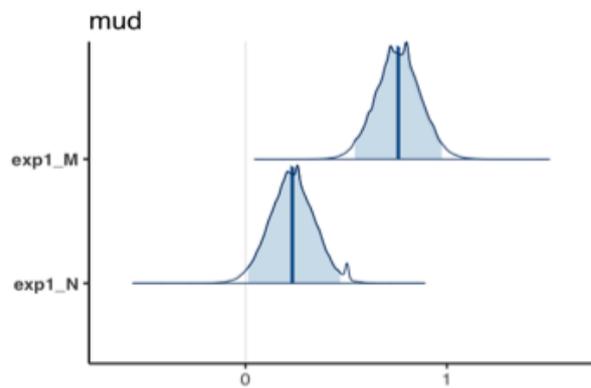


Figure 5. 各条件の信号検出力 d' の事後分布

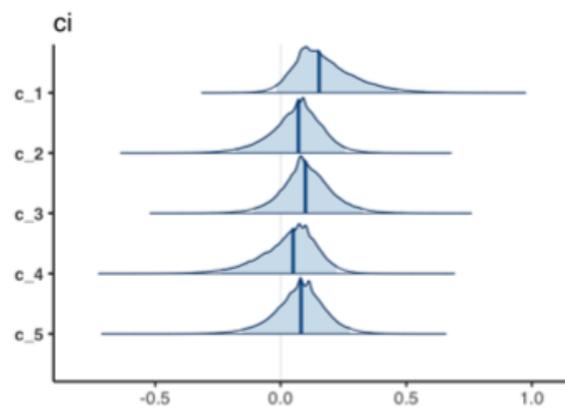


Figure 6. 参加者ごとの反応バイアス c の事後分布

率と誤警報率を標準得点に変換して、zROCを描くと、こんな感じで直線になるんですけども（ゲシャイダー、2003のp.2, 図1-1を参照）、このzROCが直線であれば、両方の分布は正規分布であるといえます。そしてzROCの傾きについて、2つの分布が等分散であればちょうど1になるんですけども、ノイズ分布の標準偏差が大きいと、傾きが大きくなり、シグナル+ノイズ分布の標準偏差が大きいと、傾きが小さくなります。このように、zROCの傾きによって等分散性の仮定が満たされているかどうかを判断することができます。

不等分散の信号検出モデルだと、等分散の信号検出モデルの指標は使えませんので、不等分散の信号検出モデル用の指標があるわけですが、信号検出力をどの分布の標準偏差で割るかに

不等分散SDTモデルの指標

✓ 不等分散のSDTモデルの指標として、

Δm : Z_{sn} がゼロのときの Z_{sn} と Z_{cn} の差の絶対値
 d_e' : 両分布の標準偏差の算術平均を単位とした信号検出力
 d_a : 両分布の標準偏差のRMS平均を単位とした信号検出力

などが提案されている(Gescheider, 2003)

✓ しかし、ベイズ推定であれば、こうした値の変換を行わなくとも、不等分散SDTモデルの指標を推定可能

Reference: 「心理物理学—方法・理論・応用—(下巻) ゲシャイダー, G. A. (著), 宮岡徹 (監訳), 倉片憲治・金子利佳・芝崎朱美 (訳) (2003) 北大路書房 16

Figure 7. 不等分散信号検出モデルの指標 (スライドより)

よっていくつか種類があります (Figure 7)。

ただ、ベイズ推定であればこういった値の補正を行わなくても、不等分散の信号検出モデルについて、指標を推定して解釈することができるというのが、もう一つのメリットになります。

ベイズの不等分散信号検出モデルの実装方法についてですが、今日は時間の関係もありますし、この後登壇される難波先生の一般化線形モデルの枠組みでの分析(難波, 2019)になってしまうので、ここではあまり深く取り扱いません。興味がある方はMatti氏のブログ (Vuorre, 2017a; 2017b) をご参照いただければ、そこに実装方法が載っております。

最近、不等分散信号検出モデルを使った実験が出てきていますので、それだけご紹介しておきます。Dubéらの研究 (Dubé, Tong, Westfall, & Bauer, 2019) の実験1では、階層的な不等分散信号検出モデルを使って、参加者の判断基準について推測を行なっています。どういう実験だったかという、名詞が呈示されるんですけども、1回呈示される項目と、2回呈示される項目と、3回呈示される項目があるというものです。再認課題のときに、それぞれの項目について記憶強度はどれくらいかを判断するように求めています。結果としては、不等分散の信号検出モデルを使って、zROCの傾きを推定しています。それに加えて、先行研究に基づいて、参加者の項目に対する判断が、項

目の呈示回数に基づいて判断しているのか、そうではなくて記憶強度に基づいて判断しているのかを、この論文の中では議論しています。詳しくは論文をご参照いただければと思います。

まとめとして、ベイズ推定で信号検出モデルを扱うことで、指標の個人内・個人間の不確実性を取り入れることができ、拡張的な信号検出モデルにも自然に使えるようになる、ということをお話をさせていただきました。ありがとうございました。

文献

- Dubé, C., Tong, K., Westfall, H., & Bauer, E. (2019). Ensemble coding of memory strength in recognition tests. *Memory & Cognition*, 47, 936-953.
- ゲシャイダー, G. A. (著), 宮岡徹 (監訳), 倉片憲治・金子利佳・芝崎朱美 (訳) (2003). 心理物理学—方法・理論・応用— (下巻). 北大路書房
- 井上和哉 (2019). 信号検出理論の概要と教示法 認知心理学会テクニカルレポート, COGPSY-TR-003.
- Lee, M. D. (2008). BayesSDT: Software for Bayesian inference with signal detection theory. *Behavior Research Methods*, 40, 450-456.
- Lee, M. D., & Wagenmakers, E. J. (2013). *Bayesian cognitive modeling: A practical course*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. (リー, M. D.・ワーゲンメイカーズ, E. J. 井関龍太 (訳) (2017) ベイズ統計で実践モデリング: 認知モデルのトレーニング 北大路書房)
- 難波修史 (2019). 回帰モデルとして見る信号検出理論——情動体験シグナルを見抜けるか—— 認知心理学会テクニカルレポート, COGPSY-TR-004
- 豊田秀樹 (2017). 実践ベイズモデリング——解析技法と認知モデル—— 朝倉書店
- Vuorre, M. (2017a). Bayesian Estimation of Signal Detection Models, Part 3, Matti Vuorre, <https://vuorre.netlify.com/post/2017/10/16/bayesian-estimation-of-signal-detection-theory-models-part-3/> (2019年9月2日)
- Vuorre, M. (2017b). Bayesian Estimation of Signal Detection Models, Part 4, Matti Vuorre, <https://vuorre.netlify.com/post/2017/10/30/bayesian-estimation-of-signal-detection-theory-models-part-4/> (2019年9月2日)
- 山根嵩史・中條和光 (2016). 記憶課題における学習容易性判断に関する手がかり利用仮説の検討 認知心理学研究, 13, 47-57.

付記

本稿の内容は、日本認知心理学会第17回大会 自主企画WS 2「シグナルかノイズか、それが問題だ—信号検出理論の深化とモデリング—」の発表内容に基づくものです。